Maranda Linț
Dorin Linț
Rozalia Marinescu
Dan Ștefan Marinescu
Mihai Monea
Steluța Monea
Marian Stroe

Matematică de excelență

pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență

clasa a V-a

mate 2000 – excelență

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

Cuprins

Capitolul I
METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARITMETICĂ

I.1. METODA COMPARAŢIEI

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

Problemele care se rezolvă cu această metodă se caracterizează prin faptul că se cer două sau mai multe mărimi atunci când legăturile/relaţiile dintre ele se pot deduce din compararea a două situaţii diferite, adică atunci când se cunosc câte două valori pentru fiecare mărime. Important este să observăm cauza care duce la diferenţierea celor două situaţii.

Metoda constă în a face ca una dintre mărimi să fie adusă la aceeaşi valoare. În acest fel problema devine mai simplă, întrucât se elimină una sau mai multe necunoscute, în final rămânând o singură „necunoscută".

Dispunerea datelor într-o astfel de problemă se face cu respectarea relaţiilor stabilite între mărimi, comparaţia dintre valorile aceleiaşi mărimi fiind pusă în evidenţă în mod direct prin aşezarea valorilor aceleiaşi mărimi, unele sub altele.

Rezolvarea problemei se face prin eliminarea succesivă a necunoscutelor până se ajunge la o relaţie cu o singură necunoscută.

APLICAŢII:

1. Trei caiete şi patru creioane costă 10 lei, iar nouă caiete şi patru creioane costă 22 lei. Cât costă un caiet? Dar un creion?

Soluţie:

3 caiete .... 4 creioane .... 10 lei
9 caiete .... 4 creioane .... 22 lei

Diferenţa de bani $22 - 10 = 12$ lei provine din diferenţa numărului de caiete: $9 - 3 = 6$.
Deducem că 6 caiete costă 12 lei, deci un caiet costă $12 : 6 = 2$ lei.
Din enunţ, 3 caiete şi 4 creioane costă 10 lei, deci 4 creioane costă $10 - 3 \cdot 2 = 4$ lei şi atunci un creion costă 1 leu.
Răspuns: Un caiet costă 2 lei, un creion costă 1 leu.

2. Andreea a cumpărat 5 caiete şi 3 creioane cu 116 lei. Pentru 4 creioane a plătit cât pentru 3 caiete. Care este preţul unui caiet? Dar al unui creion?

Soluţie:

5 caiete .... 3 creioane .... 116 lei
Luăm cantităţi de 4 ori mai mari. Atunci:
20 caiete .... 12 creioane .... 464 lei
Deoarece 4 creioane costă cât 3 caiete, atunci 12 creioane costă cât 9 caiete.
Obţinem că 20 caiete şi încă 9 caiete costă 464 lei,

29 caiete costă 464 lei, deci un caiet costă $464 : 29 = 16$ lei.
3 creioane costă $116 - 5 \cdot 16 = 36$ lei, deci un creion costă 12 lei.

3. Aflați trei numere naturale, știind că suma a câte două dintre ele este 112, 164, respectiv 130.
Soluție:
Notăm x, y, z cele trei numere.
Avem:
$x + y = 112 \quad (1)$
$y + z = 164 \quad (2)$
$z + x = 130 \quad (3)$
Adunând membru cu membru cele 3 egalități, obținem:
$x + y + y + z + z + x = 112 + 164 + 130$
$2x + 2y + 2z = 406$
$x + y + z = 203 \quad (4)$
Comparăm (1) și (4):
$$\left.\begin{array}{l} x + y = 112 \\ x + y + z = 203 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 203 - 112, z = 91$$
Comparăm (2) și (4):
$$\left\{\begin{array}{l} y + z = 164 \\ x + y + z = 203 \end{array}\right. \Rightarrow x = 203 - 164, x = 39$$
Comparăm (3) și (4):
$$\left.\begin{array}{l} x + z = 130 \\ x + y + z = 203 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 203 - 130, y = 73$$
Numerele sunt 39, 73 și 91.

4. Aflați numerele naturale a și b, știind că $a + 6b = 135$ și $2a + 3b = 90$.
Soluție:
Din $2a + 3b = 90$ obținem că $2 \cdot (2a + 3b) = 180$, adică $4a + 6b = 180$.
Avem următoarele egalități: $a + 6b = 135$
$4a + 6b = 180$.
Comparând egalitățile, deducem că $4a - a = 180 - 135$, deci $3a = 45$ și $a = 15$.
Din $15 + 6b = 135$ obținem $6b = 120$ și $b = 20$.
Numerele sunt 15 și 20.

5. 12 cuțite și 10 furculițe costă 156 lei, iar 15 cuțite și 25 furculițe de același fel costă 270 lei. Cât costă un cuțit și cât costă o furculiță?
Soluție:
Dacă 12 cuțite și 10 furculițe costă 156 lei, atunci 6 cuțite și 5 furculițe costă 116 lei : 2 = 78 lei (1).
Dacă 15 cuțite și 25 furculițe costă 270 lei atunci 3 cuțite și 5 furculițe costă 270 lei : 5 = 54 lei (2).
Comparând (1) și (2) deducem că $(6 - 3)$ cuțite costă $(78 - 54)$ lei, adică 3 cuțite costă 24 lei.
Obținem că un cuțit costă 24 lei : 3 = 8 lei.

Apoi 10 furculițe costă 156 lei – (12 · 8) lei sau

10 furculițe costă 60 lei, de unde

o furculiță costă 60 lei : 10 = 6 lei.

B. PROBLEME DE CREATIVITATE

1. Într-un bazin apa curge prin două robinete. Dacă se lasă deschis primul robinet timp de 4 ore și al doilea 6 ore, în bazin se adună 19440 litri de apă, iar dacă se lasă deschis primul robinet 6 ore și al doilea 4 ore, în bazin se adună 18360 litri de apă. Câți litri de apă curg prin fiecare robinet într-o oră?

Soluție:

Notăm cu a și b cantitatea de apă ce se adună într-o oră de la primul, respectiv de la al doilea robinet. Atunci:

$4a$ .... $6b$ .... 19440 ℓ

$6a$ .... $4b$ .... 18360 ℓ

Obținem prin adunare:

$10a$ .... $10b$ .... 37800 ℓ *și apoi*

a .... b .... 3780 ℓ

$4a$ .... $4b$ .... 15120 ℓ

Comparăm cu prima relație: $4a$ .... $4b$ .... 15120 ℓ

$4a$ .... $6b$ .... 19440 ℓ

Rezultă:

$2b = 4320 \Rightarrow b = 2160$

Și apoi $4a + 6 \cdot 2160 = 19440 \Rightarrow 4a = 6480 \Rightarrow a = 1620$

Într-o oră prin primul robinet curg 1620 ℓ, iar prin al doilea 2160 ℓ.

2. a) Diferența a două numere naturale este 2013. Dacă se dublează unul dintre numere, atunci diferența devine 1003. Aflați numerele.

b) Produsul a două numere naturale este 2013. Dacă se mărește unul dintre numere cu 7, atunci produsul devine 6710. Aflați numerele.

Soluție:

a) Deoarece diferența se micșorează, se dublează scăzătorul. Acesta este 2013 – 1003 = = 1010. Descăzutul este 2013 + 1010 = 3023. Numerele sunt 3023 și 1010.

b) Fie a, b cele două numere. Atunci $a \cdot b = 2013$ și $a \cdot (b + 7) = 6710$. Din a doua egalitate se obține $a \cdot b + 7 \cdot a = 6710 \Leftrightarrow 7 \cdot a = 6710 - 2013 \Leftrightarrow 7 \cdot a = 4697 \Rightarrow a = 671$ și apoi $b = 3$.

3. Patru mere cântăresc tot atât cât 5 pere, 3 pere cât 7 piersici, iar 5 piersici cât 8 nuci. Dacă pe un taler al unei balanțe așezăm 3 mere, câte nuci trebuie să așezăm pe celălalt taler pentru ca balanța să fie în echilibru?

Concurs „Pitagora", 2002

Soluție:

4 mere .... 5 pere $\Rightarrow$

3 · 4 mere .... 3 · 5 pere $\Leftrightarrow$ 12 mere .... 15 pere; (1)

3 pere .... 7 piersici $\Rightarrow$

$5 \cdot 3$ pere .... $5 \cdot 7$ piersici $\Leftrightarrow$ 15 pere ....35 piersici (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ 15 pere .... 12 mere
15 pere .... 35 piersici $\Rightarrow$ 12 mere .... 35 piersici (3)

Dar 5 piersici .... 8 nuci $\Rightarrow 7 \cdot 5$ piersici .... $7 \cdot 8$ nuci $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ 35 piersici .... 56 nuci (4)

Din (3) și (4) $\Rightarrow$ 12 mere .... 56 nuci $\Rightarrow$ 12 : 4 mere cântăresc tot atât cât 56 : 4 nuci $\Rightarrow$ Pe un taler se așază 3 mere, iar pe celălalt se așază 14 nuci.

4. Trei gospodine au cumpărat:
Prima: 3 kg de mere, 3 kg pere și 5 kg gutui și a plătit 20 lei;
A doua: 6 kg mere, 4 kg pere, 2 kg gutui și a plătit 28 lei;
A treia: 6 kg mere, 7 kg pere, 7 kg gutui și a plătit 39 lei.
Aflați cât costă un kilogram din fiecare fruct.

Soluție:
Adunând cantitățile cumpărate de primele două gospodine obținem că:
9 kg mere, 7 kg pere, 7 kg gutui costă $20 + 28 = 48$ lei.
Comparând cu ce a cumpărat a treia gospodină rezultă că 3 kg de mere costă $(48 - 39)$ lei $= 9$ lei, de unde aflăm că 1 kg de mere costă 3 lei.
Avem o altă problemă:
3 kg pere, 5 kg gutui costă $(20 - 3 \cdot 3) = 11$ lei
4 kg pere, 2 kg gutui costă $(28 - 6 \cdot 3) = 10$ lei.
Atunci 12 kg pere, 20 kg gutui costă $4 \cdot 11$ lei $= 44$ lei.
12 kg pere, 6 kg gutui costă $3 \cdot 10$ lei $= 30$ lei.
Rezultă prin compararea relațiilor că 14 kg gutui costă $44 - 30 = 14$ lei, deci 1 kg gutui costă 1 leu și apoi 3 kg pere costă $11 - 5 = 6$ lei, deci
1 kg pere costă $6 : 3 = 2$ lei.

Răspuns:
1 kg mere costă 3 lei.
1 kg pere costă 2 lei.
1 kg gutui costă 1 leu.

5. Numerele naturale a, b, c verifică egalitățile:
$a \cdot b = 32$, $2 \cdot b \cdot c = 16$ și $3 \cdot a \cdot c = 48$.
Aflați cele trei numere.

Soluție:
Egalitățile se mai scriu:
$a \cdot b = 32$, $b \cdot c = 8$, $a \cdot c = 16$
și atunci $(a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \cdot (a \cdot c) = 32 \cdot 8 \cdot 16$
$(a \cdot b \cdot c)^2 = 4096$
$(a \cdot b \cdot c)^2 = 64^2$
Obținem $a \cdot b \cdot c = 64$
Din $a \cdot b \cdot c = 64$ și $a \cdot b = 32 \Rightarrow c = 64 : 32$, $c = 2$.
Din $a \cdot b \cdot c = 64$ și $b \cdot c = 8 \Rightarrow a = 64 : 8$, $a = 8$.
Din $a \cdot b \cdot c = 64$ și $a \cdot c = 16 \Rightarrow b = 64 : 16$, $b = 4$.
Numerele sunt $a = 8$, $b = 4$, $c = 2$.

I.2. METODA GRAFICĂ

A. *ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ*

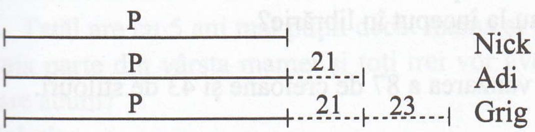
Metoda constă în reprezentarea prin desen a diferitelor mărimi care apar în problemă, evidenţierea relaţiilor dintre ele şi interpretarea desenului obţinut. Astfel, se poate forma „schema problemei" urmărind toate condiţiile acesteia.

De regulă, mărimile se reprezintă prin segmente între care se găsesc relaţii astfel încât toate segmentele să fie reprezentate în funcţie de un anumit segment (parte), a cărui mărime o considerăm necunoscută. Aflarea acesteia conduce apoi la aflarea tuturor necunoscutelor.

APLICAŢII:

1. Adi, Nick şi Grig rezolvă cele 133 de probleme ale unei reviste de matematică. Aflaţi câte probleme rezolvă fiecare dacă Adi rezolvă cu 21 de probleme mai multe decât Nick şi cu 13 mai puţine decât Grig.

Soluţie:



Reprezentăm cu un segment („partea") numărul de probleme cel mai mic. Acesta este al lui Nick.

Atunci Adi rezolvă cu 21 de probleme mai mult, iar Grig cu (21 + 13) probleme mai mult.

Numărul total de probleme este 133 şi se reprezintă astfel:

Cele trei segmente reprezintă 133 – (21 + 21 + 13) = 133 – 55 = 78.

Un segment reprezintă 78 : 3 = 26 (probleme).

Răspuns: Nick a rezolvat 26 probleme, Adi a rezolvat 47 probleme, iar Grig a rezolvat 60 probleme.

Verificarea confirmă că numerele sunt cele căutate:

$26 + 47 + 60 = 133$

$26 + 21 = 47$

$60 – 13 = 47.$

2. Adrian a împrumutat-o pe sora sa Andreea, oferindu-i suma de 860 lei în două zile, a doua zi suma de bani fiind cu 50 lei mai mare decât dublul sumei oferite în prima zi. Aflaţi sumele de bani primite de Andreea în cele 2 zile.

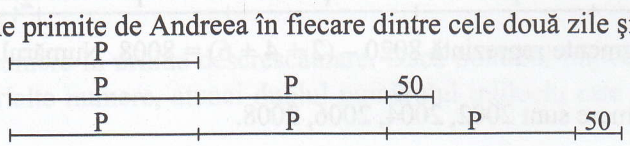
Soluţie:

Reprezentăm sumele primite de Andreea în fiecare dintre cele două zile şi în total.

În prima zi

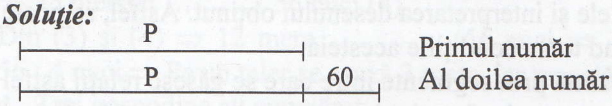
În a doua zi

În cele două zile



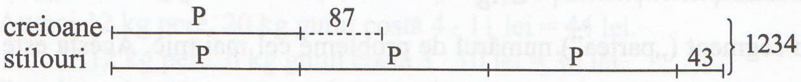
Cele trei părți reprezintă $860 - 50 = 810$ lei, iar partea reprezintă $810 : 3 = 270$ lei.
Andreea a primit 270 lei în prima zi și 590 lei a doua zi.

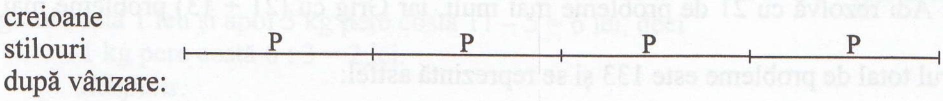
3. Suma a două numere este mai mare decât unul dintre ele cu 80. Aflați numerele dacă unul dintre numere este cu 60 mai mic decât celălalt.
Soluție:



Distingem două situații:
i) Suma este mai mare cu 80 decât primul număr. Atunci al doilea este 80 și numărul mic este $80 - 60 = 20$
ii) Suma este mai mare cu 80 decât al doilea număr. Atunci primul număr este 80 și al doilea număr este $80 + 60 = 140$
Numerele cerute sunt 20 și 80 sau 80 și 140.

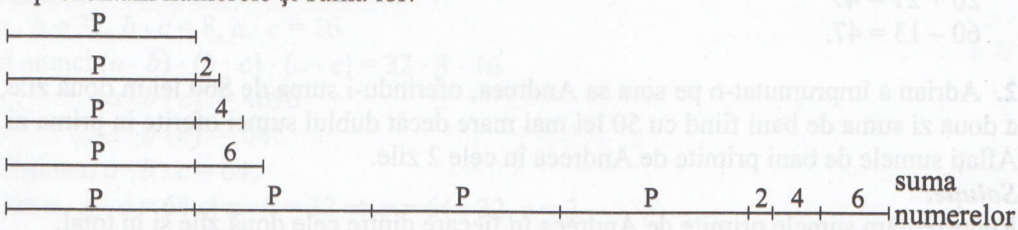
4. Într-o librărie erau 1234 creioane și stilouri. După ce s-au vândut 87 de creioane și 43 de stilouri, numărul creioanelor rămase reprezintă o treime din numărul stilourilor rămase. Câte creioane și câte stilouri erau la început în librărie?
Soluție:
Fie *P* numărul creioanelor rămase după vânzarea a 87 de creioane și 43 de stilouri.





După vânzare avem $1234 - (87 + 43) = 1234 - 130 = 1104$ creioane și stilouri, adică $1104 : 4 = 276$ creioane și $276 \cdot 3 = 828$ stilouri.
La început, erau $276 + 87 = 363$ creioane și $828 + 43 = 871$ stilouri.

5. Media aritmetică a 4 numere naturale pare consecutive este 2005. Aflați numerele.
Soluție:
Dacă media aritmetică a celor 4 numere este 2005, atunci suma lor este $2005 \cdot 4 = 8020$.
Fie p numărul cel mai mic.
Reprezentăm numerele și suma lor:



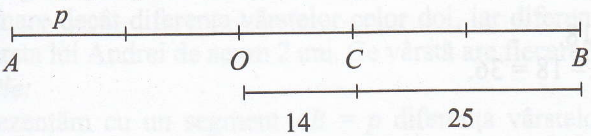
Cele patru segmente reprezintă $8020 - (2 + 4 + 6) = 8008$. Numărul mic este $8008 : 4 =$
$= 2002$.
Cele patru numere sunt 2002, 2004, 2006, 2008.

B. Probleme de creativitate

1. Un utilaj se deplasează din localitatea A spre localitatea B mergând cu aceeași viteză. După două ore de mers, nu ajunsese la punctul intermediar C, mai având de parcurs 14 km. După cinci ore de mers, utilajul a ajuns în localitatea B, dar trecuse de punctul C cu 25 km. Care este distanța de la A la C?

Soluție:

Notăm cu p și reprezentăm cu un segment distanța parcursă de utilaj într-o oră.



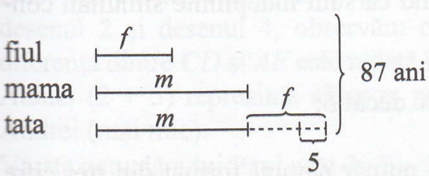
După două ore utilajul ajunge în „punctul O" și, conform enunțului, distanța OB este de $14 + 25 = 39$ km și este parcursă în $(5 - 2) = 3$ ore.

Viteza utilajului este $39 : 3 = 13$ km/h, distanța AO este de $13 \cdot 2 = 26$ km, iar distanța AC este $26 + 14 = 40$ (km).

2. Tatăl are cu 5 ani mai puțin decât mama și fiul la un loc. Peste 7 ani, fiul va avea a treia parte din vârsta mamei și toți trei vor avea împreună 108 ani. Ce vârstă are fiecare acum?

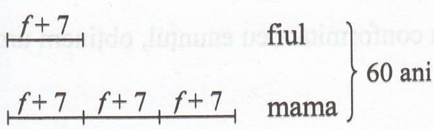
Soluție:

Fie f vârsta fiului și m vârsta mamei, acum. Suma vârstelor în prezent este $108 - 3 \cdot 7 =$ $= 87$ (ani).



$f + m = (87 + 5) : 2 = 46$ (ani). Tatăl are $46 - 5 = 41$ (ani).

Peste 7 ani, mama și fiul vor avea împreună $46 + 14 = 60$ ani.

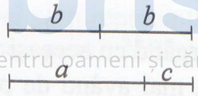


Fiul va avea $60 : 4 = 15$ (ani), deci acum are 8 ani. Mama are în prezent $46 - 8 = 38$ ani. În concluzie, tatăl, mama și fiul au respectiv vârstele: 41 ani, 38 ani, 8 ani.

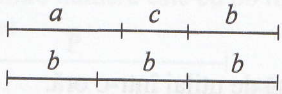
3. Suma a trei numere este 54. Cel mijlociu este jumătate din suma celorlalte două. Cel mic este cu 28 mai mic decât suma celorlalte două. Aflați cele trei numere.

Soluție:

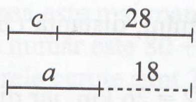
Fie a, b, c cele 3 numere în ordine descrescătoare. Dacă numărul mijlociu este jumătate din suma celorlalte numere, atunci dublul numărului mijlociu este egal cu suma celorlalte numere.



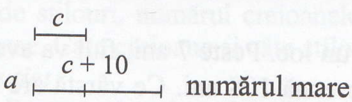
Suma numerelor se reprezintă în una din formele:



Numărul mijlociu este 54 : 3 = 18.
Suma celorlalte numere este 54 – 18 = 36.
Din enunţ avem:



Numărul mic este cu 10 mai mic decât numărul mare.

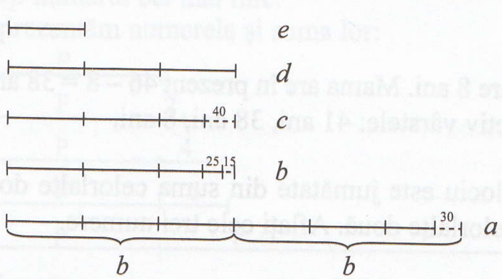


Suma lor fiind 36, deducem că dublul numărului mic este 36 – 10 = 26.
Numărul mic este 13, numărul mare 23, iar cele trei numere sunt 23, 18 şi 13.

4. Aflaţi cinci numere naturale a, b, c, d şi e, ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile:

1) a este de două ori mai mare decât b;
2) c este cu 40 mai mic decât d şi cu 25 mai mic decât b;
3) d este de trei ori mai mare decât e;
4) suma celor cinci numere este cel mai mare număr natural format din trei cifre distincte.

Soluţie:
Sesizăm că „legătura" între numere o face e.
Reprezentăm numărul e printr-un segment şi, în conformitate cu enunţul, obţinem următoarele reprezentări ale celor cinci numere:



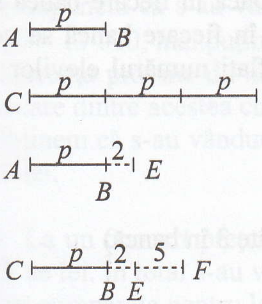
Suma numerelor este 987, reprezentată de 16 segmente de lungime e, mai puţin 85.
Atunci: 16 părţi reprezintă 987 + 85 = 1072
O parte este 1072 : 16 = 67.

$a = 6 \cdot 67 - 30 = 402 - 30 = 372$
$b = a : 2 = 372 : 2 = 186$
$c = 3 \cdot 67 - 40 = 201 - 40 = 161$
$d = 3 \cdot 67 = 201$
$e = 67$.

5. Despre Paul și Andrei știm următoarele: peste 5 ani vârsta lui Paul va fi de trei ori mai mare decât diferența vârstelor celor doi, iar diferența vârstelor celor doi este egală cu vârsta lui Andrei de acum 2 ani. Ce vârstă are fiecare?

Soluție:

Reprezentăm cu un segment $AB = p$ diferența vârstelor și apoi completăm cu datele problemei.



diferența vârstelor

vârsta lui Paul peste 5 ani

vârsta actuală a lui Andrei

vârsta lui Andrei peste 5 ani

Diferența vârstelor celor doi copii este constantă (aceeași) oricând se va calcula. Privind desenul 2 și desenul 4, observăm că avem reprezentate vârstele celor doi copii, iar diferența dintre CD și AF este redată în desenul 1 (o parte).

Atunci $(2 + 5)$ reprezintă chiar p, adică diferența de vârstă dintre Paul (mai mare) și Andrei (mai mic).

Vârsta actuală a lui Paul este $3 \cdot 7 - 5 = 21 - 5 = 16$ (ani).

Vârsta actuală a lui Andrei este $7 + 2 = 9$ (ani).